

フィードバック制御によるベイジアンゲームの信念推定

金川 雅和*・小木曾 公尚**

Estimation of Belief in Bayesian Game by Feedback Control

Masakazu KANAGAWA* and Kiminao KOGISO**

This paper presents a method for estimating player's belief related to Bayesian Nash equilibrium in a class of static Bayesian games. The method is to construct a feedback control system for a nonlinear plant that expresses evolution of a mixed strategy and a belief of the games. A numerical example confirms that their beliefs can be estimated by the proposed method.

Key Words: Bayesian game, Bayesian Nash equilibrium, belief, estimation

1. はじめに

人や組織の意思決定過程をモデル化するゲーム理論は、ゲームの均衡解析やメカニズムデザインを与える知識体系であり、ゲームの形態に応じてさまざまな概念や計算法が提供されている。本稿で扱うベイジアンゲームは、囚人のジレンマなどで用いられる標準型ゲームの構成要素（プレイヤー、行動、効用値）に加え、確率的に行動を選択する混合戦略、効用値ごとに対応付けられるタイプ、タイプ上の確率分布である信念で記述され、意思決定の不確かさが扱える静的なゲームである¹⁾。たとえば、Table 1 に示す 2 プレイヤ 2 行動 2 タイプのベイジアンゲームでは、各プレイヤーがある行動に対して 2 つの効用値をもつため、効用値の組み合わせにより 4 つの標準型ゲームが構成される。この場合、プレイヤーは、相手の信念と混合戦略を推測し、自身の効用値の期待値（期待効用）を最大にする意思決定を行なうことを想定している。そして、このベイジアンゲームの均衡解析とは、ある種の均衡を求めることであり、その均衡の 1 つに、ベイジアンナッシュ (Bayesian Nash, BN) 均衡がある^{2)~4)}。

このようなベイジアンゲームに対する均衡解析では、信念（または、事前共通確率）が所与として議論される^{2)~4)}。一方で、BN 均衡が所与とし、それに対応する信念を推定する問題

Table 1 Bayesian game with 2 players, 2 actions and 2 types

		$\mu_2(\bar{\theta})$		$\mu_2(\underline{\theta})$	
		$s_2(\bar{a} \bar{\theta})$ \bar{a}	$s_2(\underline{a} \bar{\theta})$ \underline{a}	$s_2(\bar{a} \underline{\theta})$ \bar{a}	$s_2(\underline{a} \underline{\theta})$ \underline{a}
$\mu_1(\bar{\theta})$	$s_1(\bar{a} \bar{\theta})$ \bar{a}	$u_1(\cdot, \bar{\theta}, \bar{\theta})$	$u_1(\cdot, \bar{\theta}, \bar{\theta})$	$u_1(\cdot, \bar{\theta}, \underline{\theta})$	$u_1(\cdot, \bar{\theta}, \underline{\theta})$
	$s_1(\underline{a} \bar{\theta})$ \underline{a}	$u_2(\cdot, \bar{\theta}, \bar{\theta})$	$u_2(\cdot, \bar{\theta}, \bar{\theta})$	$u_2(\cdot, \bar{\theta}, \underline{\theta})$	$u_2(\cdot, \bar{\theta}, \underline{\theta})$
$\mu_1(\underline{\theta})$	$s_1(\bar{a} \underline{\theta})$ \bar{a}	$u_1(\cdot, \underline{\theta}, \bar{\theta})$	$u_1(\cdot, \underline{\theta}, \bar{\theta})$	$u_1(\cdot, \underline{\theta}, \underline{\theta})$	$u_1(\cdot, \underline{\theta}, \underline{\theta})$
	$s_1(\underline{a} \underline{\theta})$ \underline{a}	$u_2(\cdot, \underline{\theta}, \bar{\theta})$	$u_2(\cdot, \underline{\theta}, \bar{\theta})$	$u_2(\cdot, \underline{\theta}, \underline{\theta})$	$u_2(\cdot, \underline{\theta}, \underline{\theta})$

がある^{5)~7)}。たとえば、アドホック無線通信ネットワークを対象にした侵入・攻撃検知⁵⁾では、繰り返し（動的）ベイジアンゲームを用いて信念を推定する。これは、観測された BN 均衡から、プレイヤーが“行動に攻撃を含む悪意のあるプレイヤーとなる確率”を推定することに対応する。しかし、任意の BN 均衡に対応できない、相手の行動履歴が必要など、実際にゲームを繰り返しプレイする必要がある。

そこで本研究では、ある静的なベイジアンゲームを対象に考え、ある任意の BN 均衡に対応する信念を推定する方法を提案する。これを実現するため、BN 均衡を満たす最適性条件から BN 均衡の遷移モデル（状態空間モデル）を定式化し、その遷移モデルを制御対象とする混合戦略のフィードバック制御系（所望の BN 均衡を目標値とする追従制御系）を構築する。本研究の特徴は、対象とするベイジアンゲームは、静的であるが、信念の推定アルゴリズムは、ダイナミクスをもつ動的なアルゴリズムになっている点にある。最後に、数値例題により、ある与えられた BN 均衡に対応する信念が推定できることを確認する。

* 奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科
生駒市高山町 8916-5
** 電気通信大学大学院情報理工学研究科 調布市調布ヶ丘 1-5-1
* Graduate School of Information Science, Nara Institute of Science and Technology, 8916-5 Takayamacho, Ikoma
** Department of Mechanical Engineering and Intelligent Systems, The University of Electro-Communications, 1-5-1 Chofugaoka, Chofu
(Received February 12, 2014)
(Revised September 22, 2014)

本稿の構成は、つぎのとおりである。2 章では、ベイジアンゲームと BN 均衡の定式化、問題設定を述べる。3 章では、BN 均衡の遷移を実現する遷移モデルによるフィードバック制御系を提案し、信念の推定を行なう。4 章では、数値例を用い、提案法で信念が推定できることを数値的に確認する。最後に、5 章で本稿のまとめと今後の課題を述べる。

2. ベイジアンゲーム

2.1 定式化

本稿では、2 人 2 行動 2 タイプのベイジアンゲーム $G(\mathcal{N}, \mathcal{A}, \Theta, u, \mu, S)$ を対象に考え、各記号の定義は、

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &:= \{1, 2\} \\ \mathcal{A} &:= \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 & a_i \in \mathcal{A}_i &:= \{\underline{a}, \bar{a}\} \quad \forall i \in \mathcal{N} \\ \Theta &:= \Theta_1 \times \Theta_2 & \theta_i \in \Theta_i &:= \{\underline{\theta}, \bar{\theta}\} \quad \forall i \in \mathcal{N} \\ u &:= (u_1, u_2) & u_i &: \mathcal{A} \times \Theta \rightarrow \mathfrak{R} \quad \forall i \in \mathcal{N} \\ \mu &:= (\mu_1, \mu_2) & \mu_i &\in \Pi(\Theta_i) \quad \forall i \in \mathcal{N} \\ S &:= S_1 \times S_2 & S_i &: \Theta_i \rightarrow \Pi(\mathcal{A}_i) \quad \forall i \in \mathcal{N} \end{aligned}$$

である。 \mathcal{N} は、プレイヤー集合、 \mathcal{A} は、行動集合 ($a := (a_1, a_2) \in \mathcal{A}$)、 Θ は、タイプ集合 ($\theta := (\theta_1, \theta_2) \in \Theta$)、 u は、効用関数、 μ は、信念 (μ_i はプレイヤー i のタイプ集合上の確率分布)、 S は、混合戦略である。ここで、記号 $\Pi(\mathbf{X})$ は、有限集合 \mathbf{X} 上の確率分布の集合を表わす。また、本稿では、2 プレイヤを考えるので、添字 $-i$ は、たとえば、 $i = 1$ の場合、 $a_{-1} = a_2$ である。

つぎに、プレイヤーの混合戦略、信念、効用関数の定義を示し、ベイジアンゲームで用いられる事前共通確率の仮定について説明する。タイプ θ_i におけるプレイヤー i の混合戦略 $s_i(\theta_i) \in S_i(\Theta_i) \quad \forall \theta_i \in \Theta_i$ は、

$$s_i(\theta_i) = \begin{bmatrix} s_i(\underline{a}|\theta_i) \\ s_i(\bar{a}|\theta_i) \end{bmatrix}$$

で表わす。ここで、 $s_i(\underline{a}|\theta_i) + s_i(\bar{a}|\theta_i) = 1 \quad \forall \theta_i \in \Theta_i \quad \forall i \in \mathcal{N}$ を満たし、 $s_i(a_i|\theta_i)$ は、プレイヤー i が行動 $a_i \in \mathcal{A}_i$ を選択する確率を表わす。このとき、混合戦略プロファイル $s \in S$ を

$$s := \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \quad s_i := \begin{bmatrix} s_i(\underline{\theta}) \\ s_i(\bar{\theta}) \end{bmatrix}$$

で表わす。信念に対しても同様に、信念プロファイル $\mu \in \Pi(\Theta_i) \times \Pi(\Theta_{-i}) \quad \forall i \in \mathcal{N}$ を

$$\mu := \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \quad \mu_i := \begin{bmatrix} \mu_i(\underline{\theta}) \\ \mu_i(\bar{\theta}) \end{bmatrix}$$

で表わす。ここで、 $\mu_i(\underline{\theta}) + \mu_i(\bar{\theta}) = 1 \quad \forall \theta_i \in \Theta_i \quad \forall i \in \mathcal{N}$ を満たし、 $\mu_i(\theta_i)$ は、プレイヤー i がタイプ $\theta_i \in \Theta_i$ となる確率を表わす。あるタイププロファイル $\theta := (\theta_i, \theta_{-i})$ におけるプレイヤー i の利得行列 $U_i(\theta_i, \theta_{-i})$ を

$$U_i(\theta_i, \theta_{-i}) := \begin{bmatrix} u_i(\underline{a}, \underline{a}, \theta_i, \theta_{-i}) & u_i(\underline{a}, \bar{a}, \theta_i, \theta_{-i}) \\ u_i(\bar{a}, \underline{a}, \theta_i, \theta_{-i}) & u_i(\bar{a}, \bar{a}, \theta_i, \theta_{-i}) \end{bmatrix}$$

と書き、各要素は、効用関数 $u_i(a_i, a_{-i}, \theta_i, \theta_{-i})$ で構成される。

本稿で扱うベイジアンゲームは、プレイヤー数が 2 人、おのおのが 2 種類のタイプをもつため、4 種類の標準ゲームで構成される。いま、信念が互いに独立であると仮定すれば、プレイヤー i から見てあるゲームが選ばれる確率は、

$$p_i(\theta_i, \theta_{-i}) = \mu_i(\theta_i)\mu_{-i}(\theta_{-i}) \quad (1)$$

となり、その確率分布 (共通事前確率ともいう) $p_i \in \Pi(\Theta)$ は、つぎのように書ける。

$$p_i := \begin{bmatrix} p_i(\underline{\theta}, \underline{\theta}) & p_i(\underline{\theta}, \bar{\theta}) & p_i(\bar{\theta}, \underline{\theta}) & p_i(\bar{\theta}, \bar{\theta}) \end{bmatrix}^T$$

ここで、明らかに、 p_i は μ に依存するので $p_i(\mu)$ と書き、右肩の T は転置を意味する。なお、共通事前確率は、プレイヤーに対して共通なので、(1)式の定義に従えば、 $p_1(\mu) = p_2(\mu)$ を意味する、つまり、 $p_1(\theta_1, \theta_2) = p_2(\theta_2, \theta_1)$ である。

2.2 ベイジアンナッシュ均衡

ベイジアンゲームは、複数の標準ゲームからその 1 つが確率的に選択される状況をモデル化する。そのため、プレイヤーの効用は、戦略プロファイル s に関する期待値 (期待効用) で計る。タイププロファイル $\theta \in \Theta$ が事前にわからない場合、プレイヤーの期待効用は、事前期待効用と呼ばれ、つぎのように定義される。

【定義】(事前期待効用) ある共通事前確率 p_1, p_2 のもと、ある混合戦略プロファイル $s \in S$ に対し、プレイヤー i の事前期待効用 $EU_i(s)$ は、

$$\begin{aligned} EU_i(s_i, s_{-i}) &= \sum_{\theta_i \in \Theta_i} \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} p_i(\theta_i, \theta_{-i}) s_i(\theta_i)^T U_i(\theta_i, \theta_{-i}) s_{-i}(\theta_{-i}) \\ &= p_i(\mu)^T \Lambda_i \end{aligned}$$

である。ただし、

$$\Lambda_i := \begin{bmatrix} s_i(\underline{\theta})^T U_i(\underline{\theta}, \underline{\theta}) s_{-i}(\underline{\theta}) \\ s_i(\underline{\theta})^T U_i(\underline{\theta}, \bar{\theta}) s_{-i}(\bar{\theta}) \\ s_i(\bar{\theta})^T U_i(\bar{\theta}, \underline{\theta}) s_{-i}(\underline{\theta}) \\ s_i(\bar{\theta})^T U_i(\bar{\theta}, \bar{\theta}) s_{-i}(\bar{\theta}) \end{bmatrix}$$

相手の戦略 s_{-i} が与えられる状況では、プレイヤー i の事前期待効用を最大化する混合戦略が定義できる。この混合戦略 (の集合) を最適反応と呼ぶ。

【定義】(最適反応) ある共通事前確率 p_i のもと、相手の混合戦略 s_{-i} に対するプレイヤー i の最適反応 $BR_i(s_{-i})$ は、次式で与えられる。

$$BR_i(s_{-i}) := \arg \max_{s_i \in S_i} EU_i(s_i, s_{-i})$$

つぎに、ゲーム G の Bayesian Nash 均衡を定義する。

【定義】(Bayesian Nash 均衡) ある共通事前確率 p_i のもと、

すべての $i \in \mathcal{N}$ に対して

$$EU_i(s_i, s_{-i}) \geq EU_i(s'_i, s_{-i}) \quad \forall s'_i \in S_i \quad s'_i \neq s_i$$

を満たす戦略プロファイル $s = (s_i, s_{-i})$ を Bayesian Nash (BN) 均衡という。また、最適反応を用いれば、

$$s_i \in BR_i(s_{-i}) \quad \forall i \in \mathcal{N}$$

を満たす戦略プロファイル $s = (s_i, s_{-i})$ を BN 均衡と等価に定義できる。

以上の一連の定義から、信念 μ から確率分布 p_1, p_2 が定まり、最適反応の要素 s がベイジアンゲーム G の BN 均衡となる。

2.3 問題設定

ベイジアンゲーム G に対し、ある BN 均衡に対応する信念を推定することに興味がある。そこで本稿では、混合戦略と信念が状態変数となるある種のダイナミクス Σ :

$$\mu^+ = \text{diag}(A_1, A_2)\mu \quad (2a)$$

$$s_i^+(\theta_i) = f_i(s_i(\theta_i), \mu_i, \mu_i^+) \quad \forall \theta_i \in \Theta_i \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (2b)$$

が存在すると考える。ここで、 $A_i \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ $i \in \mathcal{N}$ は、各要素が非負で列成分の和が 1 となる確率行列である。本手法では、 $s_i^+(\theta_i) \quad \forall i \in \mathcal{N}$ が BN 均衡となるダイナミクス $f_i \quad \forall i \in \mathcal{N}$ の特徴付けを行ない、所望の BN 均衡 s^* を参照入力とするフィードバック制御系を構成し、BN 均衡に対応する信念を推定する。ここで、ある信念 (または確率分布 p_i) のもとで BN 均衡が定義されることから、以後は、混合戦略 s と信念 μ の組 (μ, s) をアセスメント⁴⁾、BN 均衡に対応する s^* と対応する信念 μ^* の組を均衡アセスメント (μ^*, s^*) と呼び、以後、均衡アセスメントを用いて議論するため、右肩のアスタリスクは省略する。また、ゲーム G におけるすべての均衡アセスメントで構成される集合を \mathcal{X} で表わす。

3. 信念の推定

3.1 均衡アセスメントの遷移モデル

遷移モデルを示す前に、まず、ゲーム G のある均衡アセスメントが等式条件で特徴付けられることを示す。証明は、付録 B.1 を参照のこと。

[補題 1] ゲーム G において、次式を満たすならば、アセスメント (μ, s) は、均衡アセスメント $(\mu, s) \in \mathcal{X}$ である。

$$\epsilon s_i(s_{-i}, \theta_i) \psi(\theta_i) p_i(\mu) = 0 \quad \forall \theta_i \in \Theta_i \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (3)$$

ただし、 $\epsilon := \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$,

$$s_i(s_{-i}, \theta_i) := \begin{bmatrix} U_i(\theta_i, \underline{\theta}) s_{-i}(\underline{\theta}) & U_i(\theta_i, \bar{\theta}) s_{-i}(\bar{\theta}) \end{bmatrix}$$

$$\psi(\underline{\theta}) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \psi(\bar{\theta}) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である。

本稿では、補題 1 で特徴付けられる均衡アセスメントの集合

を $\mathcal{X}_e := \{(\mu, s) \mid \text{等式(3)の成立}\}$ と書く。このとき、包含関係 $\mathcal{X}_e \subseteq \mathcal{X}$ が成り立つ (付録 B.1 を参照のこと)。ここで、遷移モデルの議論を行なうため、つぎの仮定を設ける。

[仮定 1] \mathcal{X}_e は、空集合ではない。

つぎに、均衡アセスメントの遷移モデル $\Sigma: \mathcal{X}_e \rightarrow \mathcal{X}_e$ を達成する関数 f_i の実現を示す。

《定理 1》 仮定 1 が成立する。このとき、ゲーム G に対し、利得行列 $U_i(\theta_i, \bar{\theta}) \quad \forall \theta_i \in \Theta_i \quad i \in \mathcal{N}$ が次式を満たすならば、

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} U_i(\theta_i, \bar{\theta}) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \forall \theta_i \in \Theta_i \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (4)$$

つぎの関数 $f_i \quad \forall i \in \mathcal{N}$:

$$f_i(s_i(\underline{\theta}), \mu_i, \mu_i^+) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s_i(\underline{\theta}) \quad (5a)$$

$$f_i(s_i(\bar{\theta}), \mu_i, \mu_i^+) = \begin{bmatrix} \frac{c_i(\underline{\theta})}{c_i(\bar{\theta})} & 0 \\ 1 - \frac{c_i(\underline{\theta})}{c_i(\bar{\theta})} & 1 \end{bmatrix} s_i(\bar{\theta}) \quad (5b)$$

$$c_i(\theta_i) = \frac{\mu_i^+(\theta_i)}{\mu_i(\theta_i)} \quad \forall \theta_i \in \Theta_i$$

で構成される遷移モデル Σ (2) は、均衡アセスメント $(\mu, s) \in \mathcal{X}_e$ を均衡アセスメント $(\mu^+, s^+) \in \mathcal{X}_e$ へ遷移させる。

(注意) 定理 1 で示す遷移モデルの特徴は、利得行列が条件 (4) を満たすゲームであること、そして、 $\theta_i = \underline{\theta} \quad \forall i \in \mathcal{N}$ での混合戦略 $s_i(\underline{\theta})$ が f_i で変化しないことが挙げられる。このようなゲームでの信念推定問題は、繰り返しベイジアンゲーム (相手の行動履歴が完全に観測可能) に基づく侵入検知法⁵⁾ で見られる。

つぎに、信念と混合戦略の収束について述べる。

[系 1] 信念 μ が収束するならば、混合戦略も収束する。

証明: μ が収束するならば、 $c_i(\theta_i)$ も 1 へ収束する。したがって、(5b) 式の遷移行列も、すべての $i \in \mathcal{N}$ に対し、

$$\lim_{c_i(\theta_i) \rightarrow 1 \quad \forall \theta_i \in \Theta_i} \begin{bmatrix} \frac{c_i(\underline{\theta})}{c_i(\bar{\theta})} & 0 \\ 1 - \frac{c_i(\underline{\theta})}{c_i(\bar{\theta})} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

のように、単位行列へ収束する。 \square

3.2 フィードバック制御による信念の推定

本節では、所望の BN 均衡 \bar{s} に対応する信念の推定問題を、参照入力が \bar{s} 、制御対象が遷移モデル (5) となるフィードバック制御系に帰着させて解く。ここで、状態の初期値を $(s^0, \mu^0) \in \mathcal{X}_e$ とし、等式 $\bar{s}_i(\underline{\theta}) = s_i^0(\underline{\theta}) \quad \forall i \in \mathcal{N}$ を満たすとする。この等式を満たす初期値を見つけることは容易ではないが、本稿では、その初期値が見つかるものとして議論を進める。なお、その改善策については別の機会にて報告する。

いま、BN 均衡の定義 (信念 μ が与えられ、BN 均衡 s が定まる構造) に着目し、信念を制御入力とすることで均衡アセスメントを生成する状態遷移を実現させる。そこで本稿では、つぎのフィードバック制御系 (Fig. 1) を構成する。

$$\mu^+ = \text{diag}(A_1, A_2)\mu + g(\bar{s} - s)$$

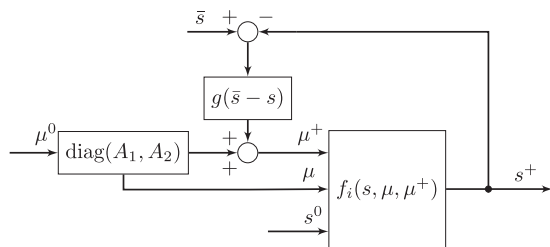


Fig. 1 Block diagram of the belief estimation

$$s_i^+(\theta_i) = f_i(s_i(\theta_i), \mu_i, \mu_i^+) \quad \forall \theta_i \in \Theta_i \quad \forall i \in \mathcal{N}$$

ここで、 $g(\bar{s} - s)$ は、誤差 $\bar{s} - s$ を入力とする PI 制御器

$$g(\bar{s} - s) := K_P(\bar{s} - s) + K_I \sum_{j=0}^t (\bar{s} - s_j)$$

を表わし、 $K_P \in \mathbb{R}^{4 \times 8}$ および $K_I \in \mathbb{R}^{4 \times 8}$ は、

$$K_P = \alpha \text{diag} \left(\begin{bmatrix} O & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} O & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right)$$

$$K_I = \beta \text{diag} \left(\begin{bmatrix} O & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} O & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right)$$

であり、 $\alpha \in \mathbb{R}$ が比例ゲイン、 $\beta \in \mathbb{R}$ が積分ゲイン、 O は、サイズが 2×2 の零行列を表わす。

4. 数値例

本章で考えるベイジアンゲーム G の利得行列は、

$$U_1(\underline{\theta}, \underline{\theta}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad U_1(\underline{\theta}, \bar{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_1(\bar{\theta}, \underline{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad U_1(\bar{\theta}, \bar{\theta}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_2(\underline{\theta}, \underline{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad U_2(\underline{\theta}, \bar{\theta}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$U_2(\bar{\theta}, \underline{\theta}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad U_2(\bar{\theta}, \bar{\theta}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

であり、(4)式を満たす。初期の均衡アセスメントが信念

$$\mu^0 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 & 0.65 & 0.35 \end{bmatrix}^T$$

と混合戦略

$$s_1^0 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.0556 & 0.9444 \end{bmatrix}^T$$

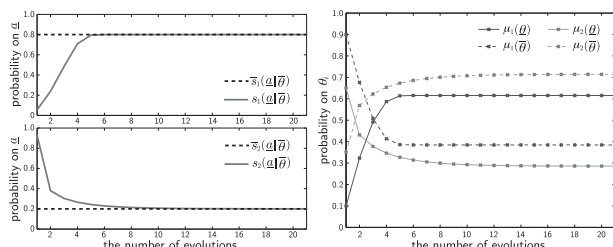
$$s_2^0 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.9286 & 0.0714 \end{bmatrix}^T$$

で与えられたとする。いま、ある BN 均衡 \bar{s}

$$\bar{s}_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}^T$$

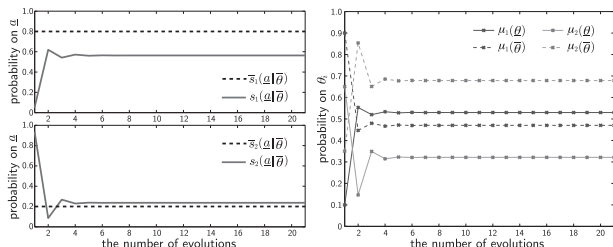
$$\bar{s}_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}^T$$

に対応する信念を推定したい。本手法では、 A_1 および A_2 としての確率行列をパラメータとして与えられる。そこで、



(a) Trajectory of BN strategy

(b) Trajectory of belief

Fig. 2 Belief estimation by feedback control system with P compensator: $A_1 = A_2 = I$ 

(a) Trajectory of BN strategy

(b) Trajectory of belief

Fig. 3 Belief estimation by feedback control system with P compensator: $A_1 \neq I$ and $A_2 \neq I$

$A_1 = A_2 = I$ (単位行列) と $A_1 \neq I$ かつ $A_2 \neq I$ の 2 種類の数値結果を示し考察する。なお、適切な確率行列と PI ゲインの系統的な設定法については、今後の課題とする。

4.1 単位行列の場合

$A_1 = A_2 = I$ として、ゲイン

$$\alpha = 0.3 \quad \beta = 0$$

を用いたときの推定結果を Fig. 2 に示す。Fig. 2(a) は、横軸が遷移回数、縦軸が各プレイヤーの混合戦略 s_i (各プレイヤーが行動 a を選ぶ確率) を表わしている。実線が混合戦略 s 、破線が目標値 \bar{s} (該当する混合戦略) である。Fig. 2(b) は、横軸が遷移回数、縦軸が信念の確率を表わし、フィードバック制御により各プレイヤーの信念 (実線と破線で確率分布を構成し、色の濃い線が $i = 1$ 、薄い線が $i = 2$ を表わす) が

$$\mu_1 = \begin{bmatrix} 0.6154 \\ 0.3846 \end{bmatrix} \quad \mu_2 = \begin{bmatrix} 0.2856 \\ 0.7144 \end{bmatrix}$$

へ収束していることがわかる。なお、得られた混合戦略と信念の過渡応答が均衡アセスメントになっていることを別途確認した。

4.2 単位行列でない場合

行列 A_1, A_2 をつぎのように設定し、

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.6 & 0.7 \end{bmatrix}$$

前節と同じゲイン $\alpha = 0.3, \beta = 0$ を用いたときの推定結果を Fig. 3 に示す。同図より、混合戦略の応答は、目標値との偏差が残っているので、所望の混合戦略に対する信念が推定できていない。そこで、積分ゲイン

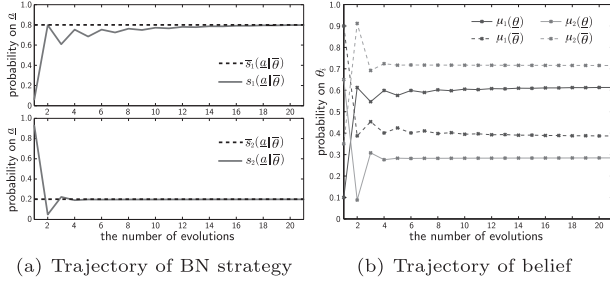


Fig. 4 Belief estimation by feedback control system with PI compensator: $A_1 \neq I$ and $A_2 \neq I$

$$\alpha = 0.3 \quad \beta = 0.08$$

を用いたときの推定結果を Fig. 4 に示す. 同図から, 混合戦略は該当する目標値へ収束し, フィードバック制御により各プレイヤーの信念が前節と同じ値

$$\mu_1 = \begin{bmatrix} 0.6154 \\ 0.3846 \end{bmatrix} \quad \mu_2 = \begin{bmatrix} 0.2856 \\ 0.7144 \end{bmatrix}$$

へ収束していた.

以上の数値結果から, 信念と混合戦略の遷移モデルを対象とするフィードバック制御により, 所望の混合戦略に対する信念を推定できることが確認された.

5. おわりに

本稿では, あるクラスの静的なベイジアンゲームに対して BN 均衡に対応する信念の推定法を提案した. 本手法では, まず, ある均衡アセスメントが満たす KKT 条件から, 信念と混合戦略の遷移モデルを導出し, そして, フィードバック制御系を構成した. つまり, 信念の推定問題を目標値追従制御問題に帰着させて解いた. 数値例から, 信念の推定が行なえることを確認した.

今後は, フィードバック制御系の安定性解析, 確率行列およびゲインの系統的な設定法, 関数 $f_i \forall i \in \mathcal{N}$ の一般化, 繰り返しベイジアンゲームを扱うための条件を明確にするなどして, 対象となるベイジアンゲームのクラスを発展させること⁸⁾である. また, 遷移モデルを対象にした動的なメカニズムデザインの構築が挙げられる.

参考文献

- 1) J.C. Harsanyi: Games with incomplete information played by "Bayesian" players, I-III. part I. The basic model, *Management Science*, **14**-3, 159/183 (1967)
- 2) M.J. Osborne: *An Introduction to Game Theory*, MIT Press (2003)
- 3) Y. Shoham and K. Leyton-Brown: *Multiagent Systems: Algorithmic, Game-Theoretic, and Logical Foundations*, Cambridge University Press (2008)
- 4) D. Fudenberg and J. Tirole: *Game Theory*, MIT Press (1991)
- 5) Y. Liu, C. Comaniciu and H. Man: A Bayesian game approach for intrusion detection in wireless ad hoc networks, *Proceedings of Processing GameNets* (2006)

- 6) S. Roy, C. Ellis, S. Shiva, D. Dasgupta, V. Shandilya and Q. Wu: A survey of game theory as applied to network security, *Proceedings of 43rd Hawaii International Conference on System Sciences*, 1/10 (2010)
- 7) M.H. Manshaei, Q. Zhu, T. Alpcan, T. Basar and J. Hubaux: Game theory meets network security and privacy, *ACM Computing Surveys*, **45**-3, 25:1/25:39 (2013)
- 8) T.C. Powell, D. Lovallo and C.R. Fox: Behavioral strategy, *Strategic Management Journal*, **32**-13, 1369/1386 (2011)

《付 録》

A. 定理 1 の証明

本付録では, 補題 1 および下記に示す補題 2, 3 を用いて定理 1 を証明する. 各補題の証明は, 付録 B に示す.

[補題 2] ゲーム G において, 関数 $f_i \forall i \in \mathcal{N}$ が (5) 式ならば, つぎの等式が成り立つ.

$$\epsilon_{G_i}(s_{-i}^+, \theta_i) = \epsilon_{G_i}(s_{-i}, \theta_i) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_{-i}(\underline{\theta})/c_{-i}(\bar{\theta}) \end{bmatrix}$$

[補題 3] ゲーム G において, 任意の $\theta_i \in \Theta_i$ で次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_{-i}(\underline{\theta})/c_{-i}(\bar{\theta}) \end{bmatrix} \psi(\theta_i) p_i(\mu^+) \\ & = c_i(\theta_i) c_{-i}(\underline{\theta}) \psi(\theta_i) p_i(\mu) \end{aligned}$$

これらの補題 1~3 を用いて, 定理 1 を証明する. まず, 仮定 1 が成り立つとする. このとき, \mathcal{X}_e は, 空集合ではないため, 均衡アセスメント $(\mu, s) \in \mathcal{X}_e$ が存在し, この (μ, s) は, \mathcal{X}_e の定義より次式を満たす.

$$\epsilon_{G_i}(s_{-i}, \theta_i) \psi(\theta_i) p_i(\mu) = 0 \quad \forall \theta_i \in \Theta_i \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (\text{A.1})$$

つぎに, (5) 式の関数 f_i で構成される遷移モデル Σ により, 均衡アセスメント (μ, s) は, あるアセスメント (μ^+, s^+) へ遷移する. いま, このアセスメントが $(\mu^+, s^+) \in \mathcal{X}_e$ を満たすことと, つぎの等式

$$\epsilon_{G_i}(s_{-i}^+, \theta_i) \psi(\theta_i) p_i(\mu^+) = 0 \quad \forall \theta_i \in \Theta_i \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (\text{A.2})$$

の成立は, 等価であるため, (A.2) 式の等式成立を確認する. (A.2) 式の左辺は, 補題 2, 3 より,

$$\begin{aligned} & \underline{\epsilon_{G_i}(s_{-i}^+, \theta_i) \psi(\theta_i) p_i(\mu^+)} \\ & = \epsilon_{G_i}(s_{-i}, \theta_i) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_{-i}(\underline{\theta})/c_{-i}(\bar{\theta}) \end{bmatrix} \psi(\theta_i) p_i(\mu^+) \\ & = c_i(\theta_i) c_{-i}(\underline{\theta}) \epsilon_{G_i}(s_{-i}, \theta_i) \psi(\theta_i) p_i(\mu) \end{aligned}$$

と変形でき (下線部が各補題を適用した部分), 最終項に (A.1) 式が現れる. ゆえに, (A.2) 式は, 任意の $(\mu, s) \in \mathcal{X}_e$ に対して常に成り立つ. つまり, $(\mu^+, s^+) \in \mathcal{X}_e$ が成立する. 以上より, 仮定 1 のもとで, 遷移モデル Σ で遷移したアセスメント (μ^+, s^+) は, $(\mu^+, s^+) \in \mathcal{X}_e$ を満たす均衡アセスメントであることが示された. \square

B. 各補題の証明

B.1 補題 1 の証明

ある相手の戦略 s_{-i} に対するプレイヤー i の最適反応は、期待効用 EU_i を評価関数とする最適化問題で計算できる。

$$\begin{aligned} \max_{s_i} \quad & EU_i(s_i, s_{-i}) \\ \text{s.t.} \quad & h_i(s_i(\theta_i)) = 0 \quad \forall \theta_i \in \Theta_i \\ & g_i(a_i, s_i(\theta_i)) \leq 0 \quad \forall \theta_i \in \Theta_i \quad \forall a_i \in \mathcal{A}_i \end{aligned}$$

ここで、確率分布 (非負の要素で和が 1) $s_i(\theta_i)$ を表わすため、 $h_i(s_i(\theta_i)) := \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} s_i(\theta_i) - 1 \quad \forall \theta_i \in \Theta_i \quad \forall i \in \mathcal{N}$, $g_i(a_i, s_i(\theta_i)) := -s_i(a_i|\theta_i)$ は、線形等式と不等式を規定する制約条件となる。また、相手の混合戦略 s_{-i} および p のもとでは、目的関数は、 s_i に関して線形となるため、上述の問題は、線形計画問題である。

このとき、関連する Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件は、最適解が存在するための必要十分条件を与える。プレイヤー i のある混合戦略 s_i を線形計画問題の局所的最適解とし、点 s_i で制約想定を満たすものとする。このとき、下記の条件を満たすラグランジュ変数 ($\delta_i(\theta_i, a_i)$ および $\lambda_i(\theta_i) \quad \forall \theta_i \in \Theta_i \quad \forall a_i \in \mathcal{A}_i$) が存在する。

$$\begin{aligned} -\nabla EU_i(s_i, s_{-i}) \\ + \sum_{\theta_i \in \Theta_i} \sum_{a_i \in \mathcal{A}_i} \delta_i(\theta_i, a_i) \nabla g_i(a_i, s_i(\theta_i)) \\ + \sum_{\theta_i \in \Theta_i} \lambda_i(\theta_i) \nabla h_i(s_i(\theta_i)) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} h_i(s_i(\theta_i)) &= 0 \quad \forall \theta_i \in \Theta_i \\ \delta_i(\theta_i, a_i) g_i(a_i, s_i(\theta_i)) &= 0 \quad \forall \theta_i \in \Theta_i \quad \forall a_i \in \mathcal{A}_i \\ g_i(a_i, s_i(\theta_i)) &\leq 0 \quad \forall \theta_i \in \Theta_i \quad \forall a_i \in \mathcal{A}_i \\ \delta_i(\theta_i, a_i) &\geq 0 \quad \forall \theta_i \in \Theta_i \quad \forall a_i \in \mathcal{A}_i \end{aligned}$$

ここで、

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial s_i} \right)^T = \left(\frac{\partial}{\partial s_i(\underline{\theta})^T}, \frac{\partial}{\partial s_i(\bar{\theta})^T} \right)$$

KKT 条件 (B.1) の第一項 $\nabla EU_i(s_i, s_{-i})$ に着目し、その勾配を書き下す。以後、 $p_i(\mu)$ の μ は省略する。勾配 $\nabla p_i^T \Lambda_i$ は、 ∇ の各要素で偏微分した形になるので、

$$\nabla p_i^T \Lambda_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s_i(\underline{\theta})^T} p_i^T \Lambda_i \\ \frac{\partial}{\partial s_i(\bar{\theta})^T} p_i^T \Lambda_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial s_i(\underline{\theta})^T} p_i \\ \frac{\partial \Lambda_i}{\partial s_i(\bar{\theta})^T} p_i \end{bmatrix}$$

となる。ここで、 $\frac{\partial \Lambda_i}{\partial s_i(\underline{\theta})^T}$ は、

$$\frac{\partial \Lambda_i}{\partial s_i(\underline{\theta})^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s_i(\underline{\theta})^T} s_i(\underline{\theta})^T U_i(\underline{\theta}, \underline{\theta}) s_{-i}(\underline{\theta}) \\ \frac{\partial}{\partial s_i(\underline{\theta})^T} s_i(\underline{\theta})^T U_i(\underline{\theta}, \bar{\theta}) s_{-i}(\bar{\theta}) \\ \frac{\partial}{\partial s_i(\underline{\theta})^T} s_i(\bar{\theta})^T U_i(\bar{\theta}, \underline{\theta}) s_{-i}(\underline{\theta}) \\ \frac{\partial}{\partial s_i(\underline{\theta})^T} s_i(\bar{\theta})^T U_i(\bar{\theta}, \bar{\theta}) s_{-i}(\bar{\theta}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s_{-i}(\underline{\theta})^T U_i(\underline{\theta}, \underline{\theta})^T \\ s_{-i}(\bar{\theta})^T U_i(\underline{\theta}, \bar{\theta})^T \\ 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \end{bmatrix}$$

となる (4×2 の行列)。同様に、

$$\frac{\partial \Lambda_i}{\partial s_i(\bar{\theta})^T} = \begin{bmatrix} 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \\ s_{-i}(\underline{\theta})^T U_i(\underline{\theta}, \bar{\theta})^T \\ s_{-i}(\bar{\theta})^T U_i(\bar{\theta}, \bar{\theta})^T \end{bmatrix}$$

となるので、それぞれの行列を転置し、非零の部分を記号 $\varsigma_i(s_{-i}, \theta_i) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad \forall \theta_i \in \Theta_i$ でまとめられる。

$$\varsigma_i(s_{-i}, \theta_i) = \begin{bmatrix} U_i(\theta_i, \underline{\theta}) s_{-i}(\underline{\theta}) & U_i(\theta_i, \bar{\theta}) s_{-i}(\bar{\theta}) \end{bmatrix}$$

よって、勾配ベクトル $\nabla p_i^T \Lambda_i$ の各要素は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial s_i(\underline{\theta})^T} p_i &= \varsigma_i(s_{-i}, \underline{\theta}) \psi(\underline{\theta}) p_i \\ \frac{\partial \Lambda_i}{\partial s_i(\bar{\theta})^T} p_i &= \varsigma_i(s_{-i}, \bar{\theta}) \psi(\bar{\theta}) p_i \end{aligned}$$

となり、勾配がタイプごとに分けて書ける。

$$\nabla p_i^T \Lambda_i = \begin{bmatrix} \varsigma_i(s_{-i}, \underline{\theta}) \psi(\underline{\theta}) p_i \\ \varsigma_i(s_{-i}, \bar{\theta}) \psi(\bar{\theta}) p_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

つぎは、KKT 条件 (B.1) の第二、三項のラグランジュ変数に着目する。 $\nabla h_i(s_i(\theta_i)) \quad \forall \theta_i \in \Theta_i$ は、

$$\begin{aligned} \nabla h_i(s_i(\underline{\theta})) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \nabla h_i(s_i(\bar{\theta})) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

となり、 $\nabla g_i(a_i, s_i(\theta_i)) \quad \forall a_i \in \mathcal{A}_i \quad \forall \theta_i \in \Theta_i$ も同様に、

$$\begin{aligned} \nabla g_i(\underline{a}, s_i(\underline{\theta})) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \nabla g_i(\bar{a}, s_i(\underline{\theta})) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \nabla g_i(\underline{a}, s_i(\bar{\theta})) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \nabla g_i(\bar{a}, s_i(\bar{\theta})) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

となる。ここで、KKT 条件 (B.1) の第二、三項をタイプ θ_i で整理する。

$$\begin{aligned} \sum_{\theta_i \in \Theta_i} \sum_{a_i \in \mathcal{A}_i} \delta_i(\theta_i, a_i) \nabla g_i(a_i, s_i(\theta_i)) \\ + \sum_{\theta_i \in \Theta_i} \lambda_i^k(\theta_i) \nabla h_i(s_i(\theta_i)) \\ = \mathbf{v}(s_i(\underline{\theta})) + \mathbf{v}(s_i(\bar{\theta})) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(s_i(\underline{\theta})) &:= \lambda_i(\underline{\theta}) \nabla h_i(s_i(\underline{\theta})) \\ &+ \sum_{a_i \in \mathcal{A}_i} \delta_i(\underline{\theta}, a_i) \nabla g_i(a_i, s_i(\underline{\theta})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(s_i(\bar{\theta})) &:= \lambda_i(\bar{\theta}) \nabla h_i(s_i(\bar{\theta})) \\ &+ \sum_{a_i \in \mathcal{A}_i} \delta_i(\bar{\theta}, a_i) \nabla g_i(a_i, s_i(\bar{\theta})) \end{aligned}$$

いま、任意の $\theta_i \in \Theta_i$ に対して $s_i(\underline{a}|\theta_i)$ と $s_i(\bar{a}|\theta_i)$ が同時に零になることはないので、 $g_i(\underline{a}, s_i(\theta_i))$ と $g_i(\bar{a}, s_i(\theta_i))$ もまた同時に零にはならない。また、KKT 条件の相補性条件より、 g_i が正值のとき、 δ_i は、零である。これらの関係から、 g_i の値によって、 \mathbf{v} は、つぎの3種類に分類できる。

$$\mathbf{v}(s_i(\underline{\theta})) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \lambda_i(\underline{\theta}) & \lambda_i(\underline{\theta}) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \text{if } s_i(\underline{a}|\underline{\theta}) \neq 0 \text{ and } s_i(\bar{a}|\underline{\theta}) \neq 0 \\ \begin{bmatrix} \lambda_i(\underline{\theta}) + \delta_i(\underline{\theta}, \underline{a}) & \lambda_i(\underline{\theta}) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \text{if } s_i(\underline{a}|\underline{\theta}) = 0 \\ \begin{bmatrix} \lambda_i(\underline{\theta}) & \lambda_i(\underline{\theta}) + \delta_i(\underline{\theta}, \bar{a}) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \text{if } s_i(\bar{a}|\underline{\theta}) = 0 \end{cases} \\ \mathbf{v}(s_i(\bar{\theta})) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda_i(\bar{\theta}) & \lambda_i(\bar{\theta}) \end{bmatrix}^T \\ \text{if } s_i(\underline{a}|\bar{\theta}) \neq 0 \text{ and } s_i(\bar{a}|\bar{\theta}) \neq 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda_i(\bar{\theta}) + \delta_i(\bar{\theta}, \underline{a}) & \lambda_i(\bar{\theta}) \end{bmatrix}^T \\ \text{if } s_i(\underline{a}|\bar{\theta}) = 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda_i(\bar{\theta}) & \lambda_i(\bar{\theta}) + \delta_i(\bar{\theta}, \bar{a}) \end{bmatrix}^T \\ \text{if } s_i(\bar{a}|\bar{\theta}) = 0 \end{cases}$$

以上から、KKT 条件(B.1)は、つぎのように書き換えられる。

$$\begin{bmatrix} \epsilon_i(s_{-i}, \underline{\theta}) \psi(\underline{\theta}) p_i \\ \epsilon_i(s_{-i}, \bar{\theta}) \psi(\bar{\theta}) p_i \end{bmatrix} = \mathbf{v}(s_i(\underline{\theta})) + \mathbf{v}(s_i(\bar{\theta})) \in \mathfrak{R}^4$$

ここで、 \mathbf{v} の引数が $s_i(\underline{\theta})$ となるとき、第3, 4要素が零に、また、引数が $s_i(\bar{\theta})$ となるときは、第1, 2要素が零になるので、

$$\epsilon_i(s_{-i}, \underline{\theta}) \psi(\underline{\theta}) p_i = \mathbf{v}_{\theta_i = \underline{\theta}}(s_i(\underline{\theta})) \in \mathfrak{R}^2$$

$$\epsilon_i(s_{-i}, \bar{\theta}) \psi(\bar{\theta}) p_i = \mathbf{v}_{\theta_i = \bar{\theta}}(s_i(\bar{\theta})) \in \mathfrak{R}^2$$

とも書ける。 $\mathbf{v}_{\theta_i = \underline{\theta}}(s_i(\underline{\theta}))$ が $\mathbf{v}(s_i(\underline{\theta}))$ の第1要素と第2要素から成るベクトル、 $\mathbf{v}_{\theta_i = \bar{\theta}}(s_i(\bar{\theta}))$ が $\mathbf{v}(s_i(\bar{\theta}))$ の第3要素と第4要素から成るベクトルを表わす。これより、上式を満たすラグランジュ変数 (λ_i および δ_i) が存在することが、 s_i が最適解となるための必要十分条件となる。さらに、 $\epsilon := \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$ を導入して、

$$\epsilon \epsilon_i(s_{-i}, \theta_i) \psi(\theta_i) p_i = \epsilon \mathbf{v}_{\theta_i}(s_i(\theta_i)) \quad \forall \theta_i \in \Theta_i \quad \forall i \in \mathcal{N}$$

と整理すれば、任意の $\theta_i \in \Theta_i$ と $i \in \mathcal{N}$ に対して

$$\epsilon \epsilon_i(s_{-i}, \theta_i) \psi(\theta_i) p_i = \begin{cases} 0 & \text{if } s_i(\underline{a}|\theta_i) \neq 0 \text{ and } s_i(\bar{a}|\theta_i) \neq 0 \\ \delta_i(\theta_i, \underline{a}) & \text{if } s_i(\underline{a}|\theta_i) = 0 \\ -\delta_i(\theta_i, \bar{a}) & \text{if } s_i(\bar{a}|\theta_i) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

が成り立つ。ここで、(B.2)式を満たす (μ, s) は、均衡アセスメントであり、その全体集合は、 \mathcal{X} となる。つまり、 $\mathcal{X} := \{(\mu, s) \mid \text{式(B.2)の成立}\}$ と書ける。そして、 \mathcal{X}_e は、等式(3)で定義しているため、 $(\mu, s) \in \mathcal{X}_e$ は、条件分岐(B.2)の上段 (s が純戦略ではない混合戦略の場合)、または、 $\delta_i = 0$ での中下段 (s が純戦略の場合) のいずれかに該当する。これより、包含関係 $\mathcal{X}_e \subseteq \mathcal{X}$ の成立が確認できる。

以上の議論より、アセスメント (μ, s) が等式(3)を満たすならば、そのアセスメントは、 $(\mu, s) \in \mathcal{X}_e \subseteq \mathcal{X}$ を満たす均衡アセスメントである。□

B.2 補題2の証明

証明の準備として、混合戦略の遷移モデルが(5)式で与えられたとして、混合戦略 s_i を展開する。

$$\begin{aligned} s_i(\bar{\theta}) &= \begin{bmatrix} s_i(\underline{a}|\bar{\theta}) \\ s_i(\bar{a}|\bar{\theta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_i(\underline{a}|\bar{\theta}) \\ 1 - s_i(\underline{a}|\bar{\theta}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s_i(\underline{a}|\bar{\theta}) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

遷移後の戦略は、つぎのようになる。

$$\begin{aligned} s_i^+(\bar{\theta}) &= f_i(s_i(\bar{\theta}), \mu_i, \mu_i^+) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{c_i(\underline{\theta})}{c_i(\bar{\theta})} & 0 \\ 1 - \frac{c_i(\underline{\theta})}{c_i(\bar{\theta})} & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s_i(\underline{a}|\bar{\theta}) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s_i(\underline{a}|\bar{\theta}) c_i(\underline{\theta}) / c_i(\bar{\theta}) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

上式より、補題2は、 $\epsilon \epsilon_i(s_{-i}, \theta_i)$ の展開から始める。

$$\epsilon \epsilon_i(s_{-i}, \theta_i) = \begin{bmatrix} \epsilon U_i(\theta_i, \underline{\theta}) s_{-i}(\underline{\theta}) & \epsilon U_i(\theta_i, \bar{\theta}) s_{-i}(\bar{\theta}) \end{bmatrix}$$

上式右辺第2ブロックは、(B.3)式と(4)式より

$$\begin{aligned} &\epsilon U_i(\theta_i, \bar{\theta}) s_{-i}(\bar{\theta}) \\ &= \epsilon U_i(\theta_i, \bar{\theta}) \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s_{-i}(\underline{a}|\bar{\theta}) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \epsilon U_i(\theta_i, \bar{\theta}) s_{-i}(\underline{a}|\bar{\theta}) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

なので、改めて、

$$\begin{aligned} &\epsilon \epsilon_i(s_{-i}, \theta_i) \\ &= \begin{bmatrix} \epsilon U_i(\theta_i, \underline{\theta}) s_{-i}(\underline{\theta}) & s_{-i}(\underline{a}|\bar{\theta}) \epsilon U_i(\theta_i, \bar{\theta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

となる。これを用い、 $\epsilon \epsilon_i(s_{-i}^+, \theta_i)$ を展開する。

$$\begin{aligned} &\epsilon \epsilon_i(s_{-i}^+, \theta_i) \\ &= \begin{bmatrix} \epsilon U_i(\theta_i, \underline{\theta}) s_{-i}^+(\underline{\theta}) & \epsilon U_i(\theta_i, \bar{\theta}) s_{-i}^+(\bar{\theta}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \epsilon U_i(\theta_i, \underline{\theta}) f_{-i}(s_{-i}(\underline{\theta}), \mu_i, \mu_i^+) \\ s_{-i}(\underline{a}|\bar{\theta}) \frac{c_{-i}(\underline{\theta})}{c_{-i}(\bar{\theta})} \epsilon U_i(\theta_i, \bar{\theta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \epsilon U_i(\theta_i, \underline{\theta}) s_{-i}(\underline{\theta}) \\ s_{-i}(\underline{a}|\bar{\theta}) \epsilon U_i(\theta_i, \bar{\theta}) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_{-i}(\underline{\theta})/c_{-i}(\bar{\theta}) \end{bmatrix} \\
&= \epsilon_{S_i}(s_{-i}, \theta_i) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_{-i}(\underline{\theta})/c_{-i}(\bar{\theta}) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2 行目から 3 行目への展開は, (B.4)式, (4)式および(5a)式を用い, 4 行目から 5 行目への展開は, (B.5)式を用いた. 以上より, 補題 2 が示された. \square

(注意) 本稿で提案する関数 f_i は, 本補題の証明が成立するように直感的に定めたものである. 条件(4)との関係に依存させて異なる関数 f_i を定めることは可能であろう. この論点は, 本研究の一般化にあたるため, 今後の課題とする.

B.3 補題 3 の証明

問題設定の(2a)式より, 遷移後の $p_i(\mu^+)$ は,

$$p_i(\mu^+) = \begin{bmatrix} c_i(\underline{\theta})c_{-i}(\underline{\theta})p_i(\underline{\theta}, \underline{\theta}) \\ c_i(\underline{\theta})c_{-i}(\bar{\theta})p_i(\underline{\theta}, \bar{\theta}) \\ c_i(\bar{\theta})c_{-i}(\underline{\theta})p_i(\bar{\theta}, \underline{\theta}) \\ c_i(\bar{\theta})c_{-i}(\bar{\theta})p_i(\bar{\theta}, \bar{\theta}) \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

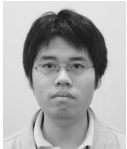
と書き直せる. (B.6)式, $\psi(\underline{\theta})$ および $\psi(\bar{\theta})$ (補題 1 で定義)を用い, 補題 3 の左辺を各タイプ別に計算する.

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_{-i}(\underline{\theta})/c_{-i}(\bar{\theta}) \end{bmatrix} \psi(\underline{\theta})p_i(\mu^+) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{-i}(\underline{\theta})/c_{-i}(\bar{\theta}) & 0 & 0 \end{bmatrix} p_i(\mu^+) \\
&= c_i(\underline{\theta})c_{-i}(\underline{\theta})\psi(\underline{\theta})p_i(\mu) \\
&\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_{-i}(\underline{\theta})/c_{-i}(\bar{\theta}) \end{bmatrix} \psi(\bar{\theta})p_i(\mu^+) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{-i}(\underline{\theta})/c_{-i}(\bar{\theta}) \end{bmatrix} p_i(\mu^+) \\
&= c_i(\bar{\theta})c_{-i}(\underline{\theta})\psi(\bar{\theta})p_i(\mu)
\end{aligned}$$

が求まるので, 上の二式を $\theta_i \in \Theta_i$ についてまとめれば, 補題 3 の等式が成り立つ. \square

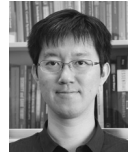
[著者紹介]

金川 雅和



2012 年長岡技術科学大学機械創造工学科卒業, 同年奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科入学, 2014 年修了. 同年(株)富士通ミッションクリティカルシステムズ入社, 現在に至る. ゲーム理論, 自動制御の研究に従事.

小木曾 公 尚 (正会員)



2004 年大阪大学大学院工学研究科電子制御機械工学専攻博士後期課程修了. 同年奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科 21 世紀 COE 研究員. 2005 年同大学院助手, 助教, 2014 年電気通信大学大学院情報理工学研究科知能機械工学専攻准教授, 現在に至る. 2010~2011 年ジョージア工科大学客員研究員. 拘束システムやハイブリッドシステムの解析と制御, ゲーム理論とその工学応用に関する研究に従事. 博士(工学). システム制御情報学会, 日本機械学会, IEEE の会員.

.....